

图象编码时小波基的选择

胡春玲

(中科院计算机语言信息工程研究中心, 北京 100080)

陈义宽

马常楼

(郑州市1030信箱202教研室, 河南 450004) (北京西三环中路19号33研究所, 北京 1000841)

摘要 小波变换用于图象压缩时,小波基的一些性质与编码的效果有很大的关系。本文在实验数据的基础上分析了小波的正交性、双正交性与正则性和消失距对静态图象编码的影响,从而给出了选择的原则。

关键词 小波基, 图象编码, 正交性和双正交性, 消失距, 正则性

1 引言

傅立叶分析是一种纯频域的分析方法,在时域内不具有任何局部性;而小波分析不仅在频域内,而且在时域内具有良好的局部性,因而在非线性信号分析领域得到普遍应用^[1]。

小波分析的基本思想是:从一个具有正则性、局部性和振荡性的基本小波函数 $\Psi(x)$ 出发,经伸缩和平移得到一函数族 $\{|a|^{-1/2}\Psi(x-b)/a | a, b \in R\}$,由此得到的函数族离散化后可构成 $L^2(R)$ 空间的规范正交基,并以之去表示或逼近信号。理论研究表明^[2]:从逼近的观点上讲,只用很少的小波系数就可以得到许多不同图象的精确逼近。因此小波是作为变换基底的一个很好选择。

S. Mallat 于 1988 年提出了小波多分辨率分析算法(Multiresolution Analysis)^[3],它尤其适合于分析图象。1989年, Daubechies 用基于离散滤波器迭代的方法构造了紧支集的规范正交小波基,使小波分解可以用信号和离散滤波器的卷积运算来实现^[4]。从而,小波分解广泛应用于图象分解。而且正交小波变换后的数据量与原始数据量保持一致,从理论上讲,由分解后的信号可以准确地恢复原信号。

但并非所有的小波基都适合于分解图象,小波

基对应的滤波器的性质与图象压缩有着重要的关系,尤其是正交性、双正交性与正则性和消失距对图象编码的影响更大,因而小波的选择就显得特别重要。

2 正交和双正交小波

对于正交小波,它对应一正交镜像滤波器,即低通滤波器 h 和高通滤波器 g 正交。若 f 为原图象, $C_{0,n}$ 为 f 的最高分辨率的抽样点,则小波分解可如下描述:

$$\begin{aligned} d_{m,n} &= \sum_k g_{2n-k} C_{m-1,k}(f) \\ C_{m,n} &= \sum_k h_{2n-k} C_{m-1,k}(f) \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $g_l = (-1)^l h_{-l+1}$ 。

因为 h 和 g 对应一正交小波基,因此还可以利用它们精确地重建原图:

$$C_{m-1,l}(f) = \sum_n [h_{2n-l} C_{m,n}(f) + g_{2n-l} d_{m,n}(f)] \quad (2)$$

大部分正交小波基是无限支集的,与此相联系的滤波器 h 和 g 也是无限冲激响应的,这在计算上是不可行的。但自从 Daubechies 构造了紧支集的正交小波基,便可以用滤波器分解图象。

若用小波来表示图象,除了正交性的要求之外,我们还希望小波是光滑的^[5],因为图象大部分是光

滑的(除少数边缘外)。而且要求小波对应的滤波器的长度应尽可能短,以便加快运算速度。但较短的滤波器对应的光滑度就小,二者互相矛盾。同时,我们希望滤波器是线性的,这样它在形成锥形数据时不需要相位补偿就能精确重建原图。

不幸的是,研究表明^[6],不存在具有完美的重建质量的正交的线性滤波器。唯一的正交对称滤波器是哈尔基,即 $h_0=h_1=2^{1/2}$ 和 $g_0=-g_1=2^{1/2}$ 。但它的局部化性能很坏,几乎可以认为是小波。

为了解决正交性和对称性的矛盾,Cohenet 等人把双正交小波引进了信号处理,即它有 2 个小波, Ψ 和它的对偶小波 $\tilde{\Psi}$ 。

对于双正交小波,分解过程仍可用式(1),但重建过程变为:

$$C_{m-1,l}(f) = \sum_n [\tilde{h}_{2n-l}C_{m,n}(f) + \tilde{g}_{2n-l}d_{m,n}(f)] \quad (3)$$

\tilde{h} 和 \tilde{g} 与 h 和 g 不相同,后者对应一小波 Ψ ,前者对应 Ψ 的对偶小波 $\tilde{\Psi}$ 。为了重建原图,我们使 h 和 \tilde{g} 正交, g 和 \tilde{h} 正交,即

$$\tilde{g}_n = (-1)^n h_{-n+1} \quad g_n = (-1)^n \tilde{h}_{-n+1} \quad (4)$$

$$\sum_n h_n \tilde{h}_{n+2k} = \delta_{k,0}$$

双正交小波降低了正交性的要求,保留了正交小波的一部分正交性,使之可达到相位保持及较短滤波器的要求。

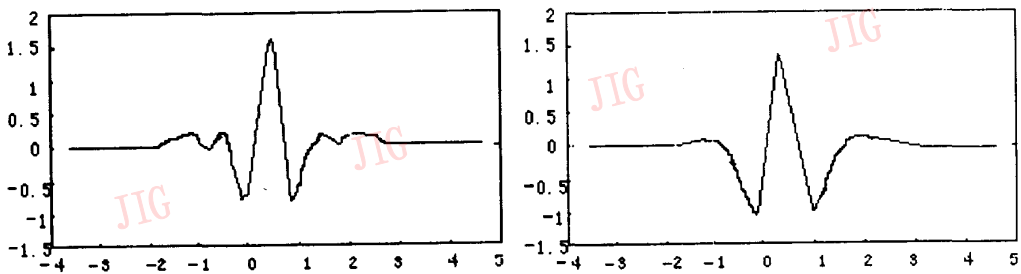
3 正则性和消失矩

除小波的正交和双正交性影响重建图象质量之外,小波的正则性和消失矩也很重要,不可忽略它们的影响。

正则指时间连续的小波 $\Psi(x)$ 至少是连续的,或者更好一点,是一阶或二阶连续可微的。正则序(Regularity order)是 $\Psi(x)$ 连续可微的次数。如果一个滤波器组是正交的,且收敛于具有紧支集连续函数 $\Psi(x)$,我们说这些滤波器是正则的(regular)。离散小波变换与一般的子带分解的区别除外观上和解释说明不一样外,重要区别就在于小波滤波器必须是正则的。对小波滤波器,极限函数 $\Psi(x)$ 的正则性越好,收敛于该极限就越快。

因为一个系数由于量化产生的误差在重建图象后,可能扩展到全局误差,该误差与离散小波 $\Psi(x)$ 成正比,所以正则性对避免重建图象的可见误差不失为一个较好的性质。

对于双正交小波来说, $\Psi(x)$ 和其对偶小波 $\tilde{\Psi}(x)$ 的正则性不一定相同,而且编码时对图象质量的影响也不相同。但假设有足够长的滤波器,一定能够得到有绝对高正则性的 $\Psi(x)$ 和 $\tilde{\Psi}(x)$ 。Daubechies 双正交小波族中最短的一组滤波器,系数如表 1, $\Psi(x)$ 和 $\tilde{\Psi}(x)$ 分别如图 1(a)、(b) 所示。



(a) 小波 Ψ 的图象

(b) 对偶小波 $\tilde{\Psi}$ 的图象

图 1

表 1 双正交小波滤波器

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$(1/\sqrt{2})h_n$	0.602 949	0.266 8664	-0.078 223	0.016 864	0.026 749
$(1/\sqrt{2})\tilde{h}_n$	0.557 543	0.295 636	-0.028 772	-0.045 636	0

可以看出, $\tilde{\Psi}(x)$ 的正则性比 $\Psi(x)$ 的要高。

若 $\Psi(x)$ 满足下式

$$\int x^l \Psi(x) dx = 0 \quad l = 0, 1, \dots, k - 1$$

即 $\Psi(x)$ 有 k 个连续的零点, 我们说 $\Psi(x)$ 的消失矩 (vanishing moments) 为 k 。消失矩的大小决定了用小波逼近光滑函数时的收敛率。当图象光滑时, 越大的消失矩将导致越小的的小波系数, 压缩比就有可能提高; 而对不光滑的图象, 将会有更多的大的小波系数。通常, 小波正则性和消失矩相互作用。双正交小波 $\Psi(x)$ 和 $\tilde{\Psi}(x)$ 各自的正则性和消失矩对小波变换编码系统的影响也不相同。

4 实验结果

为了充分说明小波基的上述这些性质对整个编码系统的影响, 我们选择了一正交小波和一双正交小波做实验。双正交滤波器如表 1, 正交滤波器如表 2, 显然, 该正交小波是非对称的

表 2 正交小波滤波器

n	0	1	2	3
$(1/\sqrt{2})h_n$	0.341 506	0.591 506	0.158 494	-0.091 506
$(1/\sqrt{2})\tilde{h}_n$	-0.341 606	0.591 506	-0.158 494	-0.091 506

首先, 我们只作一级变换, 两种小波变换采用相同的方法, 并以 Girl 作测试图象。采取两种方式实验:

(1) 变换后的数据不作任何处理, 直接用逆变换重建图象, 在这种情况下, 前者(双正交小波)所得图象的 PSNR(信噪比)为 52.215, 后者为 36.791;

(2) 变换后的数据整型化, 然后再用逆变换重建图象, 前者所得 PSNR 为 50.797, 后者为 36.655。

其次, 我们又对每个小波作三级变换, 发现对双正交小波, PSNR 依然可达到 44.710(图 2(b)), 比正交小波一级变换后的 PSNR 还大将近 8dB, 而用正交小波作三级变换后 PSNR 值仅为 28.176(图 2(c)), 严重失真, 即使作二级变换, PSNR 也只有 31.885, 已出现了明显的失真。

由此可见对称性对于图象质量的影响, 若不作相位补偿, 重建的图象不可能精确。实验中, 虽然用正交小波重建的图象失真很明显, 但它的滤波器长度很小, 卷积速度很快, 在图象质量要求不高, 而时

间限制较多的情况下, 可以考虑选择它。我们设计了一种用该正交小波编码的方案: 小波变换后, 低频部分经过一定处理用 JPEG 方案进行编码, 高频部分用 VQ 编码。结果可以获得 PSNR = 30.288, Cr = 30.595 的效果, 见图 2(d)。

对双正交小波的光滑度和消失矩, 为了说明它们对小波变换编码系统的影响, 我们用上述的双正交小波做实验。首先把 h 看做分析滤波器, \tilde{h} 看做综合滤波器, 然后把 h 和 \tilde{h} 调换一下位置, 即 \tilde{h} 看作为分析滤波器, h 看作为综合滤波器, 比较它们的编码效果。这个 Daubechies 小波, 消失矩 $k = \tilde{k} = 4$, $\tilde{\Psi}$ 的正则性要比 Ψ 好(图 1(a)、(b))。用它对应的滤波器对 Lenna 图象作实验, PSNR 值为 44.710dB。调换 h 和 \tilde{h} , PSNR 值为 44.120dB(图 2(e)、(f))。因此, 重建小波的 $\tilde{\Psi}$ 正则性越好, 得到的图象效果就越好。对于光滑的图象, 消失距越大, 压缩比就越大。同时文献[6]研究还表明, 增加 $\tilde{\Psi}$ 的正则性, 尽管 Ψ 的消失矩成指数增长, 仍然有好的效果。

但正则滤波器是否是最适合编码系统以及对 DWT 变换来说, 至少需要多少正则序就能得到好的编码效果, 这些问题依然是一个等待研究的内容。

一般地说, 图象编码时要考虑编码的速度、压缩比、图象的还原质量等因素, 然后我们可以结合上述正交性、正则性和消失距的影响, 选择合适的小波基。对于一般的人头像, 当编码的速度要求较高, 质量其次时, 需要选择滤波器短的正交或双正交小波, 但选择正交小波时, 要求正则性要好, 这样才有可能得到好一点的图象质量; 当质量要求较高时, 要选择 $\tilde{\Psi}$ 的正则性比 Ψ 好的双正交小波; 当图象本身比较光滑时, $\tilde{\Psi}$ 的正则性越好, 得到的图象质量就越高, 而且消失距越大, 压缩比就越高, 这就是说, 要提高压缩比, 就必须选择消失距大的小波。

因此, 我们在做图象的压缩编码时, 结合我们自己在一定的压缩比下高质量的要求, 选择了表 1 所示的 Daubechies 小波, 采用我们自己设计的多分辨率矢量量化算法进行编码, 得到的结果为: 对 Girl 图象, 在 Cr = 20.7 时, PSNR = 31.291; 对 Lenna, Cr = 18.18 时, PSNR = 27.468。



(a) Girl 原图 (b) 双正交小波三级变换 PSNR=44.710 (c) 正交小波三级变换 PSNR=28.176 (d) W-JPEG 编码 Cr=30.595 PSNR=30.288 (e) Lenna 原图 (f) 对偶滤波器交换后的 Lenna 图

图 2

参考文献

- 1 李国通. 小波变换及其在图象压缩编码中的应用[硕士论文], 电子技术学院.
- 2 Wim Sweldens. Wavelet, Signal compression and image processing. ACM SIGGRAPH'94.
- 3 Mallat Stephane G. A theory for multiresolution signal decomposition; the wavelet representation. IEEE Trans. on Patt. Anal. Machine Intell. 1989, 11(7):675~692.
- 4 Daubechies I. Orthonormal Basis of Compression and compactly/ supported wavelets. Pure Applied Math. ,1988, 41:909~996.
- 5 Vetterli M, Herley C. Wavelets and filter banks. IEEE Trans. Signal Process, 1992, 40:2207~2232.
- 6 Hwang Wen-Jyi, Derin Haluk. Multiresolution multiresource progressive image transmission. IEEE Trans. on Image Porcessing, 1995, 4(8):1128~1139.
- 7 马维祺. 利用子波变换的图象压缩编码技术. 信号处理, 1995, 11(3).



胡春玲 女, 1972 年生, 博士生, 主要研究领域为图象编码技术, 多媒体通信, 机器翻译, 人工智能。

陈义宽 副教授, 主要研究领域为图象编码, 数据安全, 保密通信。

马常楼 高级工程师, 主要研究领域为中文信息处理, 多媒体通信, 数据安全。

The Choice of Wavelet Bases in Image Compression

Hu Chunling

(Research Center of Computer & Language Information Engineering, Chinese Academy of Science, Beijing 100080)

Chen Yikuan

(The 202 Education & Research Room, No. 1030 Post Box, Zhengzhou, HeNan 450004)

Ma Changlou

(The Research Institute, No. 19(33), Xisanhuan ZhongLu, Beijing 100841)

Abstract When wavelet transformation is applied to image compression, some of the properties of wavelet bases have some relations With coding effect. Based on the experiments, this paper analyses what effects the orthonormal or biorthogonal bases and its regularity and vanishing moments have on static image coding. Thus, the principle of the choices is given.

Keywords Wavelet base, Image coding, Orthogonality and biorthogonality, Vanishing moments, Regularity